

電気数学入門

— 電気回路理論の導入より —

電気工学を理論的に学ぶためには、色々な数学が必要になります。このノートの目的は、電気回路の基礎を学ぶ際にどのような数学が使われるのかを見ることです。基本的な記号や用語については、たとえば西巻・森・荒井 [1] を参照してください。

1 基本的な回路要素の性質

最初に、電気回路を構成する基本的な要素に関する性質を確認し、数式で表現しましょう。

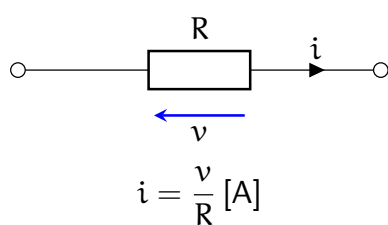


図 1 電気抵抗

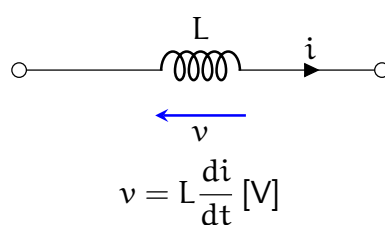


図 2 インダクタンス

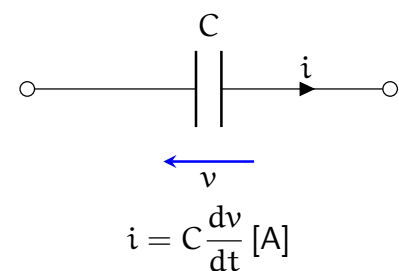


図 3 キャパシタンス

まず、図 1 は電気抵抗です。電気抵抗の端子間に電圧 v [V] を加えると、 v に比例する電流 $i = \frac{v}{R}$ [A] が流れます。これはよく知られたオームの法則です。次に、図 2 はコイルです。電気抵抗とは異なり、ある時刻における電流の値だけでは電圧が決まりません。コイルの場合は、電流の変化速度がポイントになります。小中学校では（速さ） $= \frac{\text{移動した距離}}{\text{時間}}$ と教わります

が、電流の変化速度は $\frac{\text{電流の増加量}}{\text{時間}}$ です。電流の変化速度が大きいほどコイルの両端に生じる電圧が大きくなります。電流の変化速度は数学的には電流の時間微分です。微分というと難しそうだと思う人もいるかもしれませんが、微分を使えば「コイルを流れる電流を i [A] とするときの端子間の電圧は $v = L \frac{di}{dt}$ [V] である」のように、コイルの電氣的性質を明確かつ簡潔に表現することができます。最後に、図 3 はコンデンサです。コンデンサの両端に電圧 v [V] が加わると、 v の変化速度 $\frac{dv}{dt}$ に比例する電流 $i = C \frac{dv}{dt}$ [A] が流れるわけですが、ここでも微分が使われています。このように、電気回路の学習において数学で学ぶ微分が自然に現れることに注意しましょう。

微分積分というと、接線の方程式を求めたり関数の極値を調べたりすることを思い浮かべるかもしれませんが、色々な物理量や物理法則を数式で表現しようとするときにも自然に現れてきます。力学の基本方程式はニュートンの運動方程式であり、電磁気学ではマクスウェル方程式と呼ばれる方程式が基本方程式です。マクスウェル方程式には微分が含まれています。学習が進めば、コイルの端子間電圧はファラデーの電磁誘導の法則に対応し、コンデンサを流れる「電流」はマクスウェル方程式における変位電流に対応することを知ることになるでしょう。そういう意味で、コイルやコンデンサにおける電流と電圧の関係に微分が現れるのは当然です。

2 正弦波交流と複素数

交流回路の学習では、 $i = I_m \sin(\omega t + \theta)$ [A] のような形をした正弦波交流の扱いに習熟することが基本的な目標の一つです。ここで、 I_m [A] は電流の瞬時値の最大値を表す正の数です。 ω [rad/s] は角周波数を表す正の数であり、本稿を通じて角周波数は一つ固定します（複数の ω が現れることはありません）。 θ [rad] は位相角です。正弦波交流の計算では、三角関数の代わりに複素数を使うと便利であることが知られています。そのような方法がどのようにして正当化されるのでしょうか。例として、回路の一部で次のように電気抵抗とコイルが直列に接続されているような状況を考えましょう（図 4）。

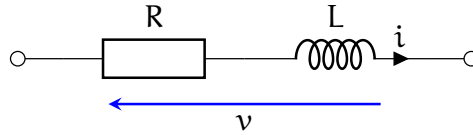


図4 電気抵抗とコイルの直列接続

電流 i [A] に対する電圧 v [V] を $v = v(i)$ とおき, $v(i)$ の性質を数式で表現します. まず, 人工的に感じるかもしれませんが, $i = \sin \omega t$ [A] という簡単な形の電流を考えましょう. このとき,

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\sin \omega t) = \omega \cos \omega t$$

ですから, コイルの両端の電圧は $\omega L \cos \omega t$ [V] ということになります. また, 抵抗の両端の電圧は $Ri = R \sin \omega t$ [V] です. したがって, キルヒホッフの法則により,

$$v(\sin \omega t) = R \sin \omega t + \omega L \cos \omega t \text{ [V]} \quad (1)$$

です. 一方, $i = \cos \omega t$ [A] ならば,

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t$$

ですから, コイルの両端の電圧は $-\omega L \sin \omega t$ [V] ということになります. 抵抗の両端の電圧は $R \cos \omega t$ [V] なので,

$$v(\cos \omega t) = R \cos \omega t - \omega L \sin \omega t \text{ [V]} \quad (2)$$

です.

さて, 一般の正弦波交流の場合に $v(i)$ を求めましょう. 三角関数の加法定理によると,

$$\sin(\omega t + \theta) = \cos \theta \sin \omega t + \sin \theta \cos \omega t$$

ですから, 正弦波交流は $i = x \sin \omega t + y \cos \omega t$ [A] という形に表すこともできます. ここで, 「重ねの理」より

$$v(x \sin \omega t + y \cos \omega t) = xv(\sin \omega t) + yv(\cos \omega t) \text{ [V]} \quad (3)$$

なので, (1), (2), (3) により,

$$\begin{aligned} v(x \sin \omega t + y \cos \omega t) &= x(R \sin \omega t + \omega L \cos \omega t) + y(R \cos \omega t - \omega L \sin \omega t) \\ &= (Rx - \omega Ly) \sin \omega t + (\omega Lx + Ry) \cos \omega t \text{ [V]} \end{aligned} \quad (4)$$

となります.

次に, 複素数の積 $(R + j\omega L)(x + jy)$ を計算して上と比較します. ここで, 電気工学の習慣にしたがって虚数単位を j で表しています (つまり, $j = \sqrt{-1}$).

$$\begin{aligned} (R + j\omega L)(x + jy) &= Rx + jRy + j\omega Lx + j^2\omega Ly \\ &= (Rx - \omega Ly) + j(\omega Lx + Ry) \end{aligned} \quad (5)$$

(4) と (5) を比較しましょう. 電流 $i = x \sin \omega t + y \cos \omega t$ [A] に複素数 $x + jy$ を対応させれば, 電圧 $v(i)$ [V] は電流 $x + jy$ に複素数 $R + j\omega L$ を掛けることにより求められることが分かりました.

補足します. 線形代数学を学ぶと, v を $x \sin \omega t + y \cos \omega t$ という形をした関数のつくる 2 次元ベクトル空間上の線形変換と考えることができます. そして, 上の (1), (2) が

$$\begin{pmatrix} R & -\omega L \\ \omega L & R \end{pmatrix}$$

という行列で表現できると理解します. これは複素数 $R + j\omega L$ を掛ける線形変換に相当します.

3 電力

3.1 有効電力

まず、電気抵抗において消費される電力について考えてみましょう（図5）。

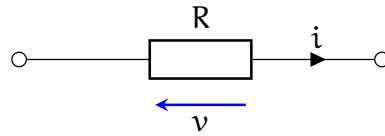


図5 電気抵抗において消費される電力を求めたい

直流なら、電力は $iv = i^2R$ [W] です。直流なら電流は変化しませんから電力は一定値ですが、交流の場合はどうでしょうか。

正弦波交流 $i = I_m \sin \omega t$ [A] を考え、 $p = iv$ [W] を計算しましょう。 $p = iv = i^2R = (I_m)^2R \sin^2 \omega t$ [W] ですから、時間 t [s] によって値が変化することになります。実際、 $p = (I_m)^2R \sin^2 \omega t$ [W] のグラフは次のようになります（図6）。

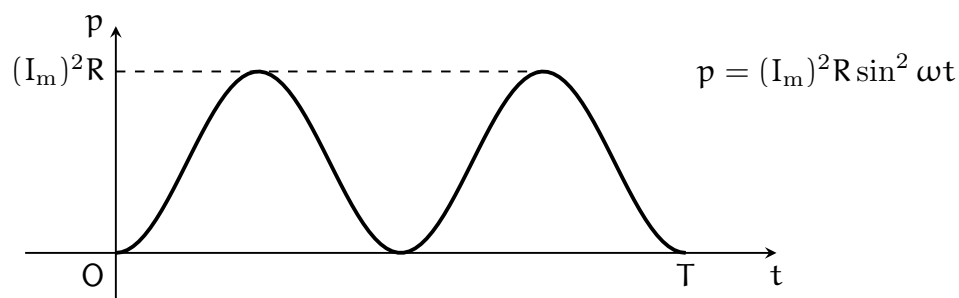


図6 $p = (I_m)^2R \sin^2 \omega t$ のグラフ

ただし、 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ [s] です（ T は周期です）。

電力が分かれば、ある時間内に電気抵抗 R [Ω] で消費されるエネルギーを求めることができます。たとえば、一周期に消費されるエネルギーは、上の図のグラフの $0 \leq t \leq T$ の部分と t 軸で囲まれる図形の面積です。面積と言えば積分ですから、エネルギーの計算に積分を使えばよいわけですが、積分の計算をする前に少し観察をしましょう。次の図7を見てください。

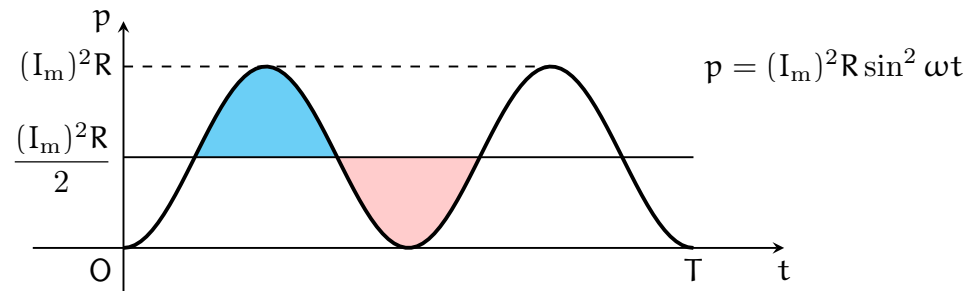


図7 水色の部分とピンク色の部分の面積は等しい

水色の部分とピンク色の部分の面積が等しいことは明らかでしょう。したがって、上の図6のグラフの $0 \leq t \leq T$ の部分と t 軸で囲まれる図形の面積、すなわち一周期の間に電気抵抗で消費されるエネルギーは、次の図8の水色の長方形の面積に等しいことが分かります。

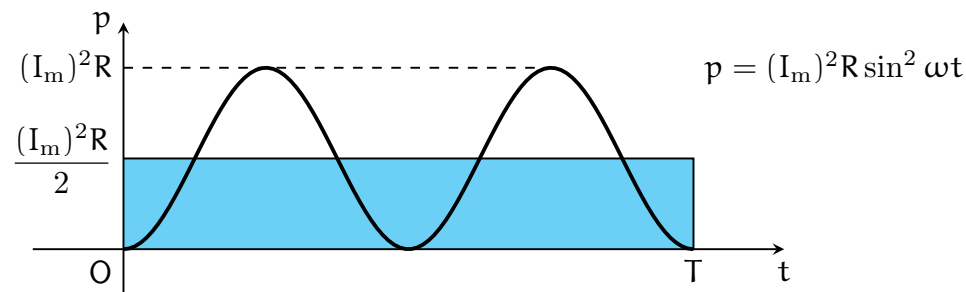


図8 一周期の間に消費されるエネルギー

ここで、図に現れる $\frac{(I_m)^2R}{2}$ [W] は、変化する電力の一周期にわたる平均を意味します。これより、時間とともに変化する電

力の他に、「平均の電力」を導入すれば便利だと考えられます。この平均の電力のことを有効電力、または単に電力といいます。一方、時間によって変化する電力を瞬時電力といいます。そして、 $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I [A]$ とおき、実効値と呼んでいます。実効値を用いると、有効電力を $I^2 R [W]$ と書くことができて分かりやすいからです。

電力の平均を、別の観点から見直してみましょう。 $T = \frac{2\pi}{\omega} [s]$ とし、 $t = 0, \frac{T}{12}, \frac{2T}{12}, \dots, \frac{11T}{12} [s]$ に対する瞬時電力 $p = iv [W]$ の値を計算してみます。

t	0	$\frac{T}{12}$	$\frac{2T}{12}$	$\frac{3T}{12}$	$\frac{4T}{12}$	$\frac{5T}{12}$	$\frac{6T}{12}$	$\frac{7T}{12}$	$\frac{8T}{12}$	$\frac{9T}{12}$	$\frac{10T}{12}$	$\frac{11T}{12}$
i	0	$\frac{I_m}{2}$	$\frac{\sqrt{3}I_m}{2}$	I_m	$\frac{\sqrt{3}I_m}{2}$	$\frac{I_m}{2}$	0	$-\frac{I_m}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}I_m}{2}$	$-I_m$	$-\frac{\sqrt{3}I_m}{2}$	$-\frac{I_m}{2}$
v	0	$\frac{I_m R}{2}$	$\frac{\sqrt{3}I_m R}{2}$	$I_m R$	$\frac{\sqrt{3}I_m R}{2}$	$\frac{I_m R}{2}$	0	$-\frac{I_m R}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}I_m R}{2}$	$-I_m R$	$-\frac{\sqrt{3}I_m R}{2}$	$-\frac{I_m R}{2}$
iv	0	$\frac{(I_m)^2 R}{4}$	$\frac{3(I_m)^2 R}{4}$	$(I_m)^2 R$	$\frac{3(I_m)^2 R}{4}$	$\frac{(I_m)^2 R}{4}$	0	$\frac{(I_m)^2 R}{4}$	$\frac{3(I_m)^2 R}{4}$	$(I_m)^2 R$	$\frac{3(I_m)^2 R}{4}$	$\frac{(I_m)^2 R}{4}$

上の表に現れる、12個の $p = iv$ の平均をとみましょう。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left\{ 0 + \frac{(I_m)^2 R}{4} + \frac{3(I_m)^2 R}{4} + (I_m)^2 R + \frac{3(I_m)^2 R}{4} + \frac{(I_m)^2 R}{4} \right. \\ & \quad \left. + 0 + \frac{(I_m)^2 R}{4} + \frac{3(I_m)^2 R}{4} + (I_m)^2 R + \frac{3(I_m)^2 R}{4} + \frac{(I_m)^2 R}{4} \right\} \\ & = \frac{1}{12} \cdot 6(I_m)^2 R = \frac{(I_m)^2 R}{2} [W] \end{aligned}$$

都合のよい t を選んで計算したからなのですが、上の図 8 に現れる平均値と一致しました。もっと多くの t を使って平均値の計算をすることができるでしょうか。 n 個の時刻 $t = 0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \frac{3T}{n}, \dots, \frac{(n-1)T}{n} [s]$ における $iv [W]$ の値を計算して平均をとみましょう。 $t_k = \frac{kT}{n} [s]$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) とおきます。

$$\frac{1}{n} \left\{ (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_0 + (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_1 + \dots + (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_{n-1} \right\} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_{k-1} [W]$$

ここで、 $\Delta t = \frac{T}{n} [s]$ とおくと、 $n \rightarrow \infty$ としたときの値が積分で表されることが分かります。

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_{k-1} & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^n (I_m)^2 R \sin^2 \omega t_{k-1} \Delta t \\ & = \frac{1}{T} \int_0^T (I_m)^2 R \sin^2 \omega t dt = \frac{(I_m)^2 R}{2} [W] \end{aligned}$$

高校では、このようにして数列の和を積分に置き換えて計算することを区分別求積法と呼んでいます。

3.2 電力と内積

負荷が電気抵抗の場合は上の通りですが、一般には電流 $i [A]$ と電圧 $v [V]$ の位相がずれることに注意する必要があります。 $i = \sqrt{2}I \sin \omega t [A]$ のとき、負荷の電圧が $v = \sqrt{2}V \sin(\omega t + \theta) = \sqrt{2}V \cos \theta \sin \omega t + \sqrt{2}V \sin \theta \cos \omega t [V]$ であるとしましょう。 $\sqrt{2}$ を付けたのは、実効値を使って計算するためです。

$$\sqrt{2} \sin \omega t = e_1, \quad \sqrt{2} \cos \omega t = e_2$$

とおくと、 $i = Ie_1 [A]$ 、 $v = (V \cos \theta)e_1 + (V \sin \theta)e_2 [V]$ と表すことができます。第 1 項は $i = Ie_1 [A]$ と平行な成分であり、第 2 項は位相が e_1 よりも 90° 進んだ e_2 と平行な成分であることに注意しましょう。さて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T (e_1)^2 dt & = \frac{1}{T} \int_0^T 2 \sin^2 \omega t dt = 1, \\ \frac{1}{T} \int_0^T (e_2)^2 dt & = \frac{1}{T} \int_0^T 2 \cos^2 \omega t dt = 1, \\ \frac{1}{T} \int_0^T e_1 e_2 dt & = \frac{1}{T} \int_0^T 2 \sin \omega t \cos \omega t dt = 0 \end{aligned}$$

を利用すると計算が分かりやすくなります。これで準備ができたので、電力を計算しましょう。

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T i v dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (I e_1) \{ (V \cos \theta) e_1 + (V \sin \theta) e_2 \} dt \\ &= IV \cos \theta \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (e_1)^2 dt + IV \sin \theta \cdot \frac{1}{T} \int_0^T e_1 e_2 dt \\ &= IV \cos \theta [W] \end{aligned} \tag{6}$$

となります。つまり、電圧 v [V] のうち、電流 i [A] と平行な成分だけが電力に現れます。

今計算した (6) を見て、内積を連想する人もいるでしょう。内積と認識してよいか、確認してみます。

$$i = \sqrt{2} a_1 \sin \omega t + \sqrt{2} a_2 \cos \omega t = a_1 e_1 + a_2 e_2 [A], \tag{7}$$

$$v = \sqrt{2} b_1 \sin \omega t + \sqrt{2} b_2 \cos \omega t = b_1 e_1 + b_2 e_2 [V] \tag{8}$$

であるとして、上と同じように電力を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T i v dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (a_1 e_1 + a_2 e_2) (b_1 e_1 + b_2 e_2) dt \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 [W] \end{aligned} \tag{9}$$

となります。つまり、(7), (8) により電流 i [A], 電圧 v [V] にベクトル $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を対応させると、電力はこれらのベクトルの内積となることが確認できました。また、実効値を使うと便利であることも納得できると思います。

2 節では、正弦波交流を複素数に対応付けて計算できることを確認しました。電力の計算も、複素数のまま実行できるでしょうか。(7), (8) の i, v に対応する複素数をそれぞれ $\dot{I} = a_1 + j a_2$ [A], $\dot{V} = b_1 + j b_2$ [V] とします（電気工学では、アルファベットの太文字の上にドットを付けて複素数を表現します）。複素数の内積は $\overline{\dot{I}} \dot{V}$ により定義されます。

$$\begin{aligned} \overline{\dot{I}} \dot{V} &= \overline{(a_1 + j a_2)} (b_1 + j b_2) = (a_1 - j a_2) (b_1 + j b_2) \\ &= (a_1 b_1 + a_2 b_2) + j (a_1 b_2 - a_2 b_1) [VA] \end{aligned}$$

$\overline{\dot{I}} \dot{V}$ の実部に、(9) と同じものが現れました。特に、 $\dot{I} = I$ [A], $\dot{V} = V \cos \theta + j V \sin \theta$ [V] とすると、

$$\overline{\dot{I}} \dot{V} = I (V \cos \theta + j V \sin \theta) = IV \cos \theta + j IV \sin \theta [VA]$$

です。複素数で計算すると、虚部に余分な項が現れました。対応関係としてはきれいではありませんが、虚部の $IV \sin \theta$ [var] が無効電力と呼ばれる、意味のある量であるのが面白いところです。

4 まとめ

電気工学の学び方は目的によって、あるいは人によって違います。資格試験に合格することを目指すのであれば、必要な公式（主に四則演算しか使わない）を覚えて使い方を練習すれば十分であり、それほど高度な数学を修得する必要はないでしょう。一方、公式の導き方を理解して理論をきちんと学びたいのであれば、ある程度数学の運用能力を身に着ける方が着実な勉強法であり、回り道のように見えても結局は早道になると思います（目的は数学の勉強ではないので、隅から隅まで学ぶ必要はありませんが）。今回は、数式を使いながら電気回路の初歩を簡単に紹介しましたが、この短いノートの中にも微分積分、複素数、線形代数の概念が自然に現れました。少しでも数学を学ぶ動機となれば幸いです。

参考文献

- [1] 西巻 正朗, 森 武昭, 荒井 俊彦. 電気回路の基礎. 第 3 版, 森北出版, 2014 年, 240p.